Math pour les science 2

Le poly du cours et les feuilles TD sont disponible dans moodle.

Groupe PY-2 : Lundi matin 8h-9h50

Vendredi matin 9h-10h30, 10h45-12h

Tsung-Hsuan TSAI

tsai@math.unistra.fr

N'hésitez pas à poser des questions.

FAITES LES EXERCISES !

1 Géométrie affine en dimension 2 et 3

1.1 Espaces vectoriels et espaces affines

Question. Comment décrire un point dans un espace?

Rappel : l'espace de dimension n

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Deux points de vue :

- $\mathbb{R}^n =$ l'espace vectoriel de dimension n, qui contient des vecteurs $\vec{v}$.
- $\mathcal{E}^n =$ l'espace affine de dimension n, qui contient des points M.

Dans $\mathbb{R}^n$: Notons les vecteurs

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \vec{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

C'est la **base canonique** de $\mathbb{R}^n$.

Un vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ peut s'écrit $\vec{u} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{e}_n$.

En particulier, dans $\mathbb{R}^2$, $\vec{i} = \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{j} = \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dans $\mathbb{R}^3$, $\vec{i} = \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{j} = \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{k} = \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

***Définition* 1.1.** *Deux vecteur $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\vec{0}\}$ sont **colinéaires** s'il existe $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ tel que*

$$\vec{u} = \lambda \vec{v}.$$

Example : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

Dans $\mathcal{E}^n$:

Définition 1.2. *Un repère cartésien est donné par $(O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ où $O \in \mathcal{E}^n$ est un point fixé applelé l'origine du repère.*

Examples $\mathcal{E}^2$ muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, ou $\mathcal{E}^3$ muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Définition 1.3. *Soit $\mathcal{E}^n$ muni du repère cartésien $(O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$. Tout point $M \in \mathcal{E}^n$ est donnée par ses coordonnées cartésiennes*

$$\overrightarrow{OM} = x_1 \vec{e}_1 + \cdots + x_n \vec{e}_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Par convention $O = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}^n$, on écrit $M = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{E}^n$.

Example : Décrire $M = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}^3$.

Soit $M, M' \in \mathcal{E}^n$ muni du repère cartésien $(O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$. On définit le vecteur

$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$

Example : $M = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, M' = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{MM'} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix}$.

Règles de calcul :

$\overrightarrow{M'M} = -\overrightarrow{MM'}$

$\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''}$

1.2 Droites affines et plans affines

Question. Comment décrire une doite dans un plan affine $\mathcal{E}^2$?

Question. Comment décrire une doite (ou un plan) dans un espace affine $\mathcal{E}^3$?

1.2.1 Dans $\mathcal{E}^2$

Définition 1.4. *Une partie $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}^2$ est une **droite affine** s'il existe un point $A \in \mathcal{D}$ et un vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^2 \backslash \{\vec{0}\}$ tel que*

$$\forall M \in \mathcal{D} \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}.$$

*Une telle droite $\mathcal{D}$ est appelée la droite affine **passant par A dirigée par $\vec{u}$**.*

Example : Quelle est la droite passant par O dirigée par $\vec{e}_1$?

l'axe x

Proposition 1.5. *Une partie $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}^2$ est une droite affine si et seulement s'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tel que*

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{E}^2 \,\middle|\, ax + by + c = 0 \right\} \underset{\mathrm{si}\, a \neq 0}{=} \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} - \lambda b \\ \lambda a \end{pmatrix} \in \mathcal{E}^2 \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

L'équation $ax + by + c = 0$ est appelée une **équation cartésienne** de $\mathcal{D}$.

Dans le cas $a \neq 0$, $\mathcal{D}$ est la droite affine passant par $\begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \end{pmatrix}$ dirigée par $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Remarque : Pourqois **une** équation cartésienne ?

Example : Trouver une équation de la droite passant par $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dirigée par $\vec{e}_1$.

$$y = 0$$

Définition 1.6. *1. Soit $\mathcal{D}$ une droite affine passant par A dirigé par $\vec{u}$. On définit sa **droite vectorielle associée**, noté $\vec{\mathcal{D}}$, comme la droite affine passant par O dirigée par $\vec{u}$.*

*2. Deux droites affines $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ sont **parallèles**, noté $\mathcal{D} // \mathcal{D}'$, si $\vec{\mathcal{D}} = \vec{\mathcal{D}}'$. i.e. ils sont dirigées par le même vecteur $\vec{u}$.*

Proposition 1.7. *1. Si $ax+by+c=0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{D}$, alors $ax+by=0$ est une équation cartésienne de sa droite vectorielle $\vec{\mathcal{D}}$.*

2. Soit $\mathcal{D},\mathcal{D}'$ deux droites affines d'équtions cartésiennes $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ respectivement. Alors $\mathcal{D}//\mathcal{D}'$ si et seulement si $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

On fait les exos !

1.1, 1.2, 1.3

1.1(i)

On cherche une équation $ax+by+c=0$ tel que

$2a-b+c=0$ et $-a+4b+c=0$

donc (soustraction) $3a-5b=0$

donc $a\colon b=5\colon 3$, donc par example $2\times 5-3+c=0$

donc $a\colon b\colon c=5\colon 3\colon -7$

donc $5x+3y-7=0$ est une équation.

1.2(i)

On cherche 2 points sur $2x+y-1=0$

Si $x=0$, alors $2\times 0+y-1=0$ donc $y=1$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un point.

On a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur

$A=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est une solution.

1.3(i) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont colinéaire, donc $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles.

1.3(ii) Les vectuer directeur de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont res. $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc parallèles.

1.2.2 Dans $\mathcal{E}^3$

Définition 1.8. *Une partie $\mathcal{D}\subset\mathcal{E}^3$ est une **droite affine** s'il existe un point $A\in\mathcal{D}$ et un vecteur $\vec{u}\in\mathbb{R}^3\backslash\{\vec{0}\}$ tel que :*

$$\forall M\in\mathcal{D}\quad \exists\,\lambda\in\mathbb{R}\quad \overrightarrow{AM}=\lambda\vec{u}.$$

- Une telle droite $\mathcal{D}$ est appelée la droite affine **passant par $\boldsymbol{A}$ dirigée par $\vec{\boldsymbol{u}}$**.
- Sa **droite vectorielle associée**, notée $\vec{\mathcal{D}}$, est la droite affine passant par O dirigée par $\vec{u}$.
- Deux droites affines $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ sont parallèles si $\vec{\mathcal{D}} = \vec{\mathcal{D}}'$. On note $\mathcal{D}//\mathcal{D}'$.

Example : Quelle est la droite passant par O dirigée par $\vec{e}_1$?

l'axe x

Définition 1.9. *Une partie $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}^3$ est un **plan affine** s'il existe un point $A \in \mathcal{P}$ et un couple de vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\vec{0}\}$ non colinéaires tel que*

$$\forall M \in \mathcal{P} \quad \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}.$$

- Un tel plan $\mathcal{P}$ est appelé le plan affine **passant par $\boldsymbol{A}$ dirigé par $(\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}})$**.
- Son **plan vectoriel associé**, noté $\vec{\mathcal{P}}$, est le plan affine passant par O dirigé par $(\vec{u}, \vec{v})$.
- Deux plans affines $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ sont parallèles si $\vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{P}}'$. On note $\mathcal{P}//\mathcal{P}'$.
- Un plan affine $\mathcal{P}$ et une droite affine $\mathcal{D}$ sont parallèles si $\vec{D} \subset \vec{\mathcal{P}}$. On note $\mathcal{D}//\mathcal{P}'$.

Example : Quel est le plan passant par O dirigée par $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$?

plan XY

Proposition 1.10. *Une partie $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}^3$ est un plan affine si et seulement s'il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tel que*

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{E}^3 \,\middle|\, ax + by + cz + d = 0 \right\} \underset{\text{si } a \neq 0}{=} \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{d}{a} - \lambda b - \mu c \\ a\lambda \\ a\mu \end{pmatrix} \in \mathcal{E}^3 \,\middle|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

L'équation $ax + by + cz + d = 0$ est appelée une **équation cartésienne** de $\mathcal{P}$.

Dans le cas $a \neq 0$, $\mathcal{P}$ est le plan affine passant par $\begin{pmatrix} -\frac{d}{a} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dirigée par $\left(\begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \right)$.

Example : Trouver une équation du plan passant par O dirigée par $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

$$0x + 0y + z = 0$$

ou simplement $z = 0$.

On fait l'exo !

1.4(i) On cherche une éqution $ax+by+cz+d=0$

tel que $3a-b+4c+d=0$ (1)

et $(3+1)a+(-1+3)b+(4-1)c+d=0$ (2)

et $(3-1)a+(-1+2)b+(4+2)c+d=0$ (3)

Donc (2)-(1) $a+3b-c=0$

(3)-(1) $-a+2b+2c=0$

addition $5b+c=0$

donc $b\colon c=-1\colon 5$

donc $a\colon b\colon c=8\colon -1\colon 5$

donc $a\colon b\colon c\colon d=8\colon -1\colon 5\colon -45$

donc $8x-y+5z-45$ est une équation

ESSAYER DE REFAIRE AVEC PRODUIT VECTORIEL

Proposition 1.11. *1. Si $ax+by+cz+d=0$ est une équation cartésienne d'un plan affine $\mathcal{P}$, alors $ax+by+cz=0$ est une équation cartésienne de son plan vectoriel $\vec{\mathcal{P}}$.*

2. Soit $\mathcal{P},\mathcal{P}'$ deux plans affines d'éqution cartésiennes $ax+by+cz+d=0$ et $a'x+b'y+c'z+d'=0$ respectivement. Alors $\mathcal{P}//\mathcal{P}'$ ssi $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

Exos 1.5, 1.6

1.6 oui

Proposition 1.12. *Une partie $\mathcal{D}\in\mathcal{E}^3$ est une droite affine si et seulement si c'est l'intersection de deux plans affines non parallèles.*

Si c'est l'intersection de $\mathcal{P},\mathcal{P}'$ d'équations cartésiennes $ax+by+cz+d=0$, $a'x+b'y+c'z+d'=0$ respectivement, alors

$$\mathcal{D}=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in\mathcal{E}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{array}\right\}.$$

Le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{c} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{array}\right.$$

est appelé un **système d'équations cartésinnes** de $\mathcal{D}$.

Example : Trouver un système d'équations de la droite passant par O dirigée par $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

C'est l'emsemble des points $\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$ est un système d'équations

On fait l'exo !

1.7(ii)

Trouver un point et un vecteur de $\left\{ \begin{array}{c} 2x + -y + 3z - 1 = 0 \\ x + y - 4z = 0 \end{array} \right.$

Un point : on pose $x = 1$ et on résoudre $\left\{ \begin{array}{c} -y + 3z + 1 = 0 \\ y - 4z + 1 = 0 \end{array} \right.$, on trouve $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

On cherche un autre point : on pose $x = 0$ et on résoudre $\left\{ \begin{array}{c} -y + 3z - 1 = 0 \\ y - 4z = 0 \end{array} \right.$, on trouve $\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Donce $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur

1.3 Produit scalaire et orthogonalité

1.3.1 Produit scalaire de deux vecteurs

Question. Quand est-ce que deux vecteurs (ou droites, ou plans) sont orthogonaux?

Définition 1.13. *Soit* $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ *deux vecteurs dans* $\mathbb{R}^n$*. Le* ***produit scalaire*** *de* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *est défini par*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} := \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \in \mathbb{R}.$$

Examples : Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

$$\vec{u} \cdot \vec{e}_i = u_i \qquad \vec{u} \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i^2$$

Règles de calculs :

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ (commutativité)
- $(\lambda\vec{u}+\upsilon\vec{v})\cdot\vec{w}=\lambda\vec{u}\cdot\vec{w}+\upsilon\vec{v}\cdot\vec{w}$ (linéarité)
- $\vec{w}\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\vec{w}\cdot\vec{u}+\vec{w}\cdot\vec{v}$
- Attention, il n'y a pas de sens d'écrire $\vec{u}\cdot\vec{v}\cdot\vec{w}$!

Définition 1.14. *Soit* $\vec{u}=\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$. *La* ***norme*** *de* $\vec{u}$ *est définie par*

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}u_i^2}.$$

Exemple $n=2$: $\left\|\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{u_1^2+u_2^2}$.

Par le théorème de Pythagore, c'est la longueur du vecteur $\vec{u}$.

Proposition 1.15. *Soit* $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^n$, *soit* $\lambda\in\mathbb{R}$.

- $\|\vec{u}\|=0$ *ssi* $\vec{u}=\vec{0}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$.
- $\|\lambda\vec{u}\|=\sqrt{\lambda^2}\|\vec{u}\|=|\lambda|\,\|\vec{u}\|$.
- $\|\vec{u}+\vec{v}\|\leqslant\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$. *(inégalité triangulaire)*

On fait les exos !

2.1(i), 2.5(i)

2.1 On cherche $\vec{w}=\lambda\vec{u}$ tel que $-3\vec{u}\cdot\lambda\vec{u}=-6$

i.e. $-3\lambda\|\vec{u}\|^2=-6$, donc $\lambda=2$.

2.5 $(3u-v)\cdot(-2u-5v)=-6\|u\|^2-13u\cdot v+5\|v\|^2=-54+78+80=104$

Notation. *Soit* $\vec{u},\vec{v}$ *deux vecteurs non nul de* $\mathbb{R}^n$. *L'angle non orienté entre* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *est noté*

$$(\vec{u};\vec{v})\in[0,\pi].$$

Deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ sont dits orthogonaux si $(\vec{u};\vec{v}) = \frac{\pi}{2}$.

Théorème 1.16. *Soit $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non nul de $\mathbb{R}^n$. On a*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos(\vec{u};\vec{v}).$$

Démonstration : Par les calculs

$$\|u - v\|^2 = (u - v) \cdot (u - v) = \|u\|^2 - 2u \cdot v + \|v\|^2$$

Par la thm d'al kashi

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos(\vec{u};\vec{v})$$

Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos(\vec{u};\vec{v})$.

Corollaire 1.17. *Soit $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non nul de $\mathbb{R}^n$.*

1. $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|$. *(Car $-1 \leqslant \cos \leqslant 1$)*
2. *$\vec{u}, \vec{v}$ sont colinéarie ssi $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|$. (cos = 1 ou -1)*
3. *$\vec{u}, \vec{v}$ sont orthogonaux ssi $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. ($\cos\frac{\pi}{2} = 0$)*

On fait les exos !

2.2(i), 2.3(i), 2.7, 2.10(i)

2.3(i) $\cos(\vec{u};\vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|} = 15/30 = 1/2$ donc $(\vec{u};\vec{v}) = \pi/3$

2.10(i) on veut que $\begin{pmatrix} 2 - m \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 + m \end{pmatrix} = 6 - 3m - 5 + 5m = 2m + 1 = 0$

Donc $m = -1/2$.

1.3.2 Droites et plans affines et orthogonalité

Question. Quand est-ce que deux droites affines sont orthogonales ?

Définition 1.18. *Soit $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ deux droites affines (dans $\mathcal{E}^2$ ou $\mathcal{E}^3$) dirigées par $\vec{u}, \vec{u}'$ respectivement. On dit que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont orthogonale, noté $\mathcal{D} \perp \mathcal{D}'$, si*

$$\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0.$$

On s'en fiche qu'elles passent par quels points.

Définition 1.19. *Soit $\mathcal{D}$ une droite affine dans $\mathcal{E}^3$ dirigée par $\vec{u}$, $\mathcal{P}$ un plan affine dans $\mathcal{E}^3$ dirigée par $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$. On dit que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont orthogonaux, noté $\mathcal{D}\perp\mathcal{P}$, si*

$$\vec{u}\cdot\vec{v}_1 = 0 \qquad \textit{et} \qquad \vec{u}\cdot\vec{v}_2 = 0.$$

Proposition 1.20. *Soit $\mathcal{D}$ une dirigée par $\vec{u}$, $\mathcal{P}$ passant par A dirigée par $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$. Alors $\mathcal{D}\perp\mathcal{P}$ ssi*

$$\forall M \in \mathcal{P}, \quad \vec{u}\cdot\overrightarrow{AM} = 0.$$

Démonstration : Car il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2$.

Proposition 1.21. *Soit $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ un vecteur non nul et soit $A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ un point dans $\mathcal{E}^2$. L'ensemble des points $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{E}^2$ tel que $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$ est une droite affine $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne*

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right) = a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

*Le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est appelé un **vecteur normal** de $\mathcal{D}$.*

Pourqoui **un** vecteur normal mais pas **le** ? $\vec{n} = \begin{pmatrix} 15a \\ 15b \end{pmatrix}$ est un autre.

Proposition 1.22. *Soit $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ un vecteur non nul et soit $A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ un point dans $\mathcal{E}^3$. L'ensemble des points $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{E}^3$ tel que $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$ est un plan affine $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne*

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \right) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est appelé un vecteur normal de $\mathcal{P}$.

On fait les exos !

2.12(i), 2.13(i)

2.12 (i) $D = \{2x - 3y + 5 = 0\}$

$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, Δ est parallèle à D, on cherche $2x - 3y + c = 0$ qui passe par A, donc $c = 3$,

donc $\Delta = \{2x - 3y + 3 = 0\}$

Δ' est orthogonal à D, donc dirigée par $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de Δ'

On cherche $3x + 2y + c = 0$ passant par A, $c = -2$, donc $\Delta' = \{3x + 2y - 2 = 0\}$.

2.13(i)

$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, on cherche une équation $y + 2z + d = 0$ passant par A, on a $d = -2$, donc $y + 2z - 2 = 0$ est une équation cartésiene du plan passant par A de vecteur normal $\vec{n}$.

1.4 Produit vectoriel

Rappel

Définition 1.23. *Le déterminant de deux vecteur* $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *est défini par*

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} := u_1 v_2 - u_2 v_1.$$

Définition 1.24. *Le déterminant de trois vecteur* $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *est défini par*

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} := w_1 \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} + w_2 \begin{vmatrix} u_3 & v_3 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix} + w_3 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}.$$

Définition 1.25. *Soit* $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ *deux vecteurs dans* $\mathbb{R}^3$*. Le* ***produit vectoriel*** *de* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *est le seul vecteur* $\vec{u} \wedge \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ *tel que*

$$\forall \vec{w} \in \mathbb{R}^3 \quad (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}).$$

Autrement dit, c'est le vecteur défini par

$$\vec{u} \wedge \vec{v} := \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Examples : Notons $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{j}, \vec{k}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}.$$

Pour une notation informelle :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} u_3 & v_3 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & \vec{i} \\ u_2 & v_2 & \vec{j} \\ u_3 & v_3 & \vec{k} \end{vmatrix}.$$

Règles de calculs :

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ (**antisymétrique**, donc $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$);
- $(\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2) \wedge \vec{v} = \lambda_1 (\vec{u}_1 \wedge \vec{v}) + \lambda_2 (\vec{u}_2 \wedge \vec{v})$ (**linéarité à gauche**, même chose à droite);
- $\vec{u} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \det(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$ et $\vec{v} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$ (orthogonalité);
- $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$ (identité de Lagrange).

Proposition 1.26. *En point de vu géométrique, si* $\vec{u}$,$\vec{v}$ *sont deux vecteurs non nul et non colinéaires, alors* $\vec{u} \wedge \vec{v}$ *est le seul vecteur de* $\mathbb{R}^3$ *vérifiant :*

1. $\vec{u} \wedge \vec{v}$ *est orthogonal aux* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$*.*

   i.e. $\vec{u} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$ *et* $\vec{v} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$.

2. $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ *est l'aire du paralélogramme engendré par* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$*.*

   i.e. $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}; \vec{v})$.

3. *La base* $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ *est avec la main droite (au sens direct).*

On remarque que

$\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2\sin(\vec{u};\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2\,(1-\cos(\vec{u};\vec{v})^2) = \|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2\cos(\vec{u};\vec{v})^2 =$
$\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2$

On fait les exos !

3.2, 3.3

3.2 On cherche un plan P passant par $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -10 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de P

Donc l'équation cartésienne de P est $2(x+1)+10(y-1)+3(z-3) = 2x+10y+3z-17 = 0$.

L'aire du triangle ABC est $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\| = \frac{\sqrt{4+100+9}}{2} = \frac{\sqrt{113}}{2}$.

3.3 Quand est ce que trois vecteurs u, v, w sont coplanaire?

Si l'un des trois est nul, c'est fini.

Si u, v colinéare, c'est fini.

Sinon, w est dans le plan endendré par u, v ssi $\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tel que $w = \lambda u + \mu v$

ssi $(u\wedge v)\cdot w = 0$.

$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AB}$ = 2-4+2=0.

Donc A, B, C, D coplanaire !!

1.5 Applications et transformations affines

1.5.1 Généralité

En dimension 1, une application affine de $\mathcal{E}^1$ est une application $f\colon \mathcal{E}^1 \to \mathcal{E}^1$ de la forme

$$f(x) = ax + b$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Pour que f soit bijective, il faut et il suffit que $a \neq 0$.

Question. Quel est analogue en dimension 2 ou 3 ?

Rappel : Une matrice carrée A est inversible ssi $\det(A) \neq 0$.

Définition 1.27. *Une **application affine** du plan $\mathcal{E}^2$ est une application $f\colon \mathcal{E}^2 \to \mathcal{E}^2$ du type*

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + e \\ cx + dy + f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

avec $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

*On dit que f est une **transformation affine** si f est bijective.*

Proposition 1.28. *Soit $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. L'application $f\colon \mathcal{E}^2 \to \mathcal{E}^2$ définie par*

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + e \\ cx + dy + f \end{pmatrix}$$

est bijective ssi $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$

Dans ce cas, $f^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x - e \\ y - f \end{pmatrix}$.

Définition 1.29. *Une* ***application affine*** *de l'espace $\mathcal{E}^3$ est une application $f:\mathcal{E}^3 \to \mathcal{E}^3$ du type*

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by+cz+k \\ dx+ey+fz+l \\ gx+hy+iz+m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix}$$

avec $a,b,c,d,e,f,g,h,i,k,l,m \in \mathbb{R}$.

On dit que f est une ***transformation affine*** *si f est bijective.*

Proposition 1.30. *Soit $a,b,c,d,e,f,g,h,i,k,l,m \in \mathbb{R}$. L'application $f:\mathcal{E}^3 \to \mathcal{E}^3$ définie par*

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix}$$

est bijective ssi $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \neq 0.$

Dans ce cas, $f^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x-k \\ y-l \\ z-m \end{pmatrix}.$

1.5.2 Translations et homothéties

Ce sont les premiers exemples de transformations affines.

Définition 1.31. *Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$. On appelle* ***translation du vecteur $\vec{u}$*** *, noté $\tau_{\vec{u}}$, l'application $\tau_{\vec{u}}:\mathcal{E}^n \to \mathcal{E}^n$ tel que $\forall M \in \mathcal{E}^n$, si $M' = \tau_{\vec{u}}(M)$ alors*

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \vec{u}.$$

Proposition 1.32. *Une translation est une transformation affine.*

n=2 : Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, alors $\tau_{\vec{u}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x_0 \\ y+y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$

n=3 : Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, alors $\tau_{\vec{u}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x_0 \\ y+y_0 \\ z+z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$

Rappel $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Règles de calculs :

- $\tau_{\vec{0}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}^n}$
- $\tau_{\vec{u}} \circ \tau_{\vec{v}} = \tau_{\vec{v}} \circ \tau_{\vec{u}} = \tau_{\vec{u}+\vec{v}}$
- $\tau_{\vec{u}}^{-1} = \tau_{-\vec{u}}$

Pour tout M, $\tau_{\vec{0}}(M) = M + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = M$, c'est l'identité de $\mathcal{E}^n$.

Soit f, g deux fonction de $\mathcal{E}^n$ dans $\mathcal{E}^n$, alors $f \circ g$ est la fonction de $\mathcal{E}^n$ dans $\mathcal{E}^n$ définie par

$$f \circ g(M) = f(g(M)).$$

Définition 1.33. *Soit $k \in \mathbb{R}^*$ et $A \in \mathcal{E}^n$. On appelle* ***homothétie de centre A de rapport k****, noté $h_{A,k}$, l'application $h_{A,k}: \mathcal{E}^n \to \mathcal{E}^n$ tel que $\forall M \in \mathcal{E}^n$, si $M' = h_{A,k}(M)$ alors*

$$\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}.$$

Proposition 1.34. *Une homothétie est une transformation affine.*

n=2 :$h_{O,k}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

Soit $A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, alors $h_{A,k}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -ka+a \\ -kb+b \end{pmatrix}$.

n=3 : Soit $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, alors $h_{A,k}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -ka+a \\ -kb+b \\ -kc+c \end{pmatrix}$.

Règles de calculs :

- $h_{A,1} = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}^n}$
- $h_{A,k} \circ h_{A,k'} = h_{A,kk'}$
- $h_{A,k}^{-1} = h_{A,k^{-1}}$
- $h_{B,k} = \tau_{\overrightarrow{AB}} \circ h_{A,k} \circ \tau_{\overrightarrow{BA}}$

On fait les exos !

2.1, 2.2

2.1(i)$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix}$ est la translation de vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(ii)$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+3 \\ 2y-1 \end{pmatrix}$ est une homothétie de raport 2, de centre?

Le centre ne bouge pas. On résout$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3 \\ 2y-1 \end{pmatrix}$, on a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui est le centre.

(iii)$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x-2 \\ -y+1 \\ -z+3 \end{pmatrix}$ est une homothétie de raport -1, de centre?

Le centre ne bouge pas, le centre vérifie $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-2 \\ -y+1 \\ -z+3 \end{pmatrix}$, on a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$ est le centre.

2.2 On cherche les inverse de

(i)$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+1 \\ 2y-1 \end{pmatrix}$ est l'homothétie de raport 2, de centre $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Son inverse est l'homothétie de raport 1/2, de centre $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1/2(x+1)-1 \\ 1/2(y-1)+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2\,(x-1) \\ 1/2(y+1) \end{pmatrix}$

(ii)$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z \end{pmatrix}$ est une tranlation de vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix}$ d'inverse $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix}$.

(iii)$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1/3x+1 \\ 1/3y+1 \\ 1/3z-4 \end{pmatrix}$ est l'homothétie de raport 1/3, de centre $\begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Son inverse est l'homothétie de raport 3, de centre $\begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3(x-3/2)+3/2 \\ 3(y-3/2)+3/2 \\ 3(z+6)-6 \end{pmatrix}$.

1.5.3 Rotations dans $\mathcal{E}^2$

Définition 1.35. *Soit $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$. L'angle orienté de $\vec{u}$ à $\vec{v}$ est l'angle par le sens antihoraire, noté*

$$\widehat{(\vec{u};\vec{v})} \in [0, 2\pi[.$$

Définition 1.36. *Soit $\theta \in [0, 2\pi[$ et $A \in \mathcal{E}^2$. La* ***rotation d'angle θ de centre A*** *est l'application $r_{A,\theta} : \mathcal{E}^2 \to \mathcal{E}^2$ tel que, pour tout point $M \in \mathcal{E}^2$, si $M' = r_{A,\theta}(M)$ alors*

$$\|\overrightarrow{AM'}\| = \|\overrightarrow{AM}\| \quad et \quad \widehat{(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'})} = \theta.$$

Proposition 1.37. *Une rotation de $\mathcal{E}^2$ est une transformation affine.*

Exemples : de centre $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$r_{O,\theta}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta x - \sin\theta y \\ \sin\theta x + \cos\theta y \end{pmatrix} = \cos\theta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \sin\theta\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

La matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est appelée la **matrice de rotation** d'angle θ.

Si $A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, alors

$$r_{A,\theta}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta(x-a) - \sin\theta(y-b) + a \\ \sin\theta(x-a) + \cos\theta(y-b) + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Règles de calculs :

- $r_{A,0} = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}^2}$
- $r_{A,\theta} \circ r_{A,\theta'} = r_{A,\theta+\theta'}$
- $r_{A,\theta}^{-1} = r_{A,-\theta}$
- $r_{B,\theta} = \tau_{\overrightarrow{AB}} \circ r_{A,\theta} \circ \tau_{\overrightarrow{BA}}$

Remarque : En dimension 3, il nous faut une axe de rotation au lieu d'un centre. On ne fait pas ici.

On fait les exos !

3.1, 3.2

3.1(i) rotation de centre $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ d'angle $\theta = \pi/4$

$\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$

$$r\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2(x-1) - \sqrt{2}/2(y+1) + 1 \\ \sqrt{2}/2(x-1) + \sqrt{2}/2(y+1) - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2x - \sqrt{2}/2y + 1 - \sqrt{2} \\ \sqrt{2}/2x + \sqrt{2}/2y - 1 \end{pmatrix}$$

(ii) rotation de centre $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ d'angle $4\pi/3$

$\cos(4\pi/3) = -1/2$, $\sin(4\pi/3) = -\sqrt{3}/2$

$$r\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2(x-1) + \sqrt{3}/2(y-2) + 1 \\ -\sqrt{3}/2(x-1) - 1/2(y-2) + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2x + \sqrt{3}/2y + 3/2 + \sqrt{3} \\ -\sqrt{3}/2x - 1/2y + \sqrt{3}/2 + 3 \end{pmatrix}$$

3.2

Trouver le centre et l'angle de la rotation définie par

$$r\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

on resout $\cos\theta = 1/2$, $\sin\theta = \sqrt{3}/2$, on a $\theta = \pi/3$.

Le centre est fixé par r, donc il vérifie $r\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; on résout

$\begin{array}{r} x = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \end{array}$, on trouve $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est le centre.

1.5.4 Projection orthogonale

Question. Comment décrire la projection d'un point sur une droite (ou un plan)?

Définition 1.38. *Soit $\mathcal{D}$ une droite affine dans $\mathcal{E}^2$ (ou $\mathcal{E}^3$). La* ***projection orthogonale sur $\mathcal{D}$*** *est l'application $\pi_{\mathcal{D}}: \mathcal{E}^2 \to \mathcal{E}^2$ (ou $\mathcal{E}^3 \to \mathcal{E}^3$) tel que, pour tout point $M \in \mathcal{E}^2$ (ou $\mathcal{E}^3$), si $M' = \pi_{\mathcal{D}}(M)$, alors*

$$M' \in \mathcal{D} \text{ et } \overrightarrow{MM'} \perp \mathcal{D}.$$

Définition 1.39. *Soit $\mathcal{P}$ un plan affine dans $\mathcal{E}^3$. La* ***projection orthogonale sur $\mathcal{P}$*** *est l'application $\pi_{\mathcal{P}}: \mathcal{E}^3 \to \mathcal{E}^3$ tel que, pour tout point $M \in \mathcal{E}^3$, si $M' = \pi_{\mathcal{P}}(M)$, alors*

$$M' \in \mathcal{P} \text{ et } \overrightarrow{MM'} \perp \mathcal{P}.$$

Proposition 1.40. *Une projection orthogonale est une application affine.*

Remarque. Une projection orthogonale n'est pas une transformation affine (i.e. pas bijective). Pourquoi ?

Exemple : La projection orthogonale sur la droite D définie par $y=0$ (l'axe de x) dans $\mathcal{E}^2$?

$$\pi_D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

La projection orthogonale sur le plan P défini par $z=0$ (plan XY) dans $\mathcal{E}^3$?

$$\pi_P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La projection orthogonale sur la droite D définie par $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ (l 'axe de x) dans $\mathcal{E}^3$?

$$\pi_D \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La projection orthogonale sur le plan $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}^3$ d'équation cartésienne $x - y + z - 1 = 0$?

Soit $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on note $M' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \pi_P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

On veut que $M' \in P$ et $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonale à P

Donc $x' - y' + z' - 1 = 0$ et il existe λ tel que $\begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \\ z' - z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

on a $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \lambda \\ y - \lambda \\ z + \lambda \end{pmatrix}$, donc $(x + \lambda) - (y - \lambda) + (z + \lambda) - 1 = 0$, on a $\lambda = \frac{-x + y - z + 1}{3}$.

Donc $\pi_P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x + y - z + 1}{3} \\ \frac{x + 2y + z - 1}{3} \\ \frac{-x + y + 2z + 1}{3} \end{pmatrix}$

On fait les exos !

1.1, 1.2

1.1 (i) $D: x - y + 1 = 0$

Il existe λ tel que $\pi_D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \lambda \\ y - \lambda \end{pmatrix} \in D$

donc $(x + \lambda) - (y - \lambda) + 1 = 0$, donc $\lambda = (-x + y - 1)/2$,

donc $\pi_D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x + y - 1)/2 \\ (x + y + 1)/2 \end{pmatrix}$.

1.1 (iii) $P: x - y + 2z - 1 = 0$

Il existe λ tel que $\pi_P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \lambda \\ y - \lambda \\ z + 2\lambda \end{pmatrix} \in P$

$\lambda = 1/6(-x + y - 2z + 1)$

donc on a π_P.

1.2(i) $\pi_D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2(x - y + 4) \\ 1/2(-x + y + 4) \end{pmatrix}$

un vecteur normal ? pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on sait que

$\begin{pmatrix} 1/2(x - y + 4) \\ 1/2(-x + y + 4) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2(-x - y + 4) \\ 1/2(-x - y + 4) \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de D.

Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de D, D : $x+y+c=0$.

$\pi_D\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\in$D, donc $2+2+c=0$, on a $c=-4$.

L'équation cartésinne de D est $x+y-4=0$.

1.2(iii) $\pi_P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/2(x+y+1) \\ 1/2(x+y-1) \\ z \end{pmatrix}$

pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1/2(x+y+1) \\ 1/2(x+y-1) \\ z \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/2(-x+y+1) \\ 1/2(x-y-1) \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de P

on divise par $(-x+y+1)$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en est un, donc P : $x-y+d=0$.

$\pi_P\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}\in P$, donc $d=-1$, donc P : $x-y-1=0$.

EXOS de révision

feuille 1

1.1 (iii) Donner une équation de la droite $D\in\mathcal{E}^2$ passant par $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ avec $ab\neq 0$.

$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur, donc $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur normal,

Donc une équation est $bx+ay+\mu=0$, on cherche $\mu\in\mathbb{R}$:

$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ est un point sur D, donc $ba+a\cdot 0+\mu=0$, donc $\mu=-ab$, une équation est $bx+ay+-ab=0$.

1.4 (iii) Donner une équation du plan $P\in\mathcal{E}^3$ passant par $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ avec $abc\neq 0$.

$\begin{pmatrix} a \\ -b \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc \\ ac \\ ab \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de P.

Donc une équation de P est $bcx + acy + abz + \mu = 0$.

$\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in P$, donc $abc + 0 + 0 + \mu = 0$, donc $\mu = -abc$. Donc une équation de P est

$bcx + acy + abz - abc = 0$.

Remarque : Les vecteurs normaux d'une droite affine dans un espace ne sont pas tous colinéaire !

Soit $D\colon \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ une doite affine dans l'espace. Alors $P\colon y + z = 0$ es un plan qui contient D, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de P, donc de D. Mais $P\colon 3y + z = 0$ es un autre plan contenant D, $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un autre vecteur normal de D.

1.8 (i) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le couple (a,b) pour que les droites $D\colon \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = az - 2 \end{cases}$ et $D'\colon \begin{cases} x = bz - 3 \\ y = 4z + 1 \end{cases}$ soient parallèles.

On cherche les vecteurs directeurs et on cherche la condtion qu'ils soient parallèles.

Pour D, elle passe par $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ a-2 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D.

Pour D', elle passe par $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b-3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} b \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D'.

Ils sont parallèles ssi $\begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ssi $\begin{pmatrix} a-4 \\ b-2 \\ 8-ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ssi $a = 4$ et $b = 2$.

2 Matrices

Pour la suite $\mathbb{K}$ (corps) désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

(ça peut aussi être $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Z}$ dans certain conditions)

2.1 Définitions

Définition 2.1. *Une **matrice de taille $n \times p$** à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un tableau A d'éléments de $\mathbb{K}$ à n lignes et p colonnes :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Pour simplifier, on peut noter $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ ou $A = (a_{ij})$ s'il n'y a pas d'ambiguité sur n et p.

On note aussi $(A)_{ij} := a_{ij}$ pour un coefficient.

Notation.

On note $M_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensembles des matrces $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.

*On note $M_n(\mathbb{K})$ l'ensembles des matrices $n \times n$, appelée les **matrices carrées** d'ordere n.*

Vocabulaires :

- Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est **diagonale** si $a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$.

  ex $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

- Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est **triangulaire supérieure (stricte)** si $a_{ij} = 0 \ \forall i > j \ (i \geqslant j)$.

  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 7 \\ 0 & 5 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure,

  $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure strcte.

  Remarque : l'ensemble des matrice **triangulaire supérieur** contient l'ensemble des matrice **triangulaire supérieur stricte** et l'ensemble des matrice **diagonale**.

  L'intersection de l'ensemble des matrice **triangulaire supérieur stricte** et l'ensemble des matrice **diagonale** est $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

- Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est **triangulaire inférieure (stricte)** si $a_{ij} = 0 \ \forall i < j \ (i \leqslant j)$.

- Une matrice $A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_p \end{pmatrix} \in M_{1,p}(\mathbb{K})$ est appelée un **vecteur ligne**.

- Une matrice $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ est appelée un **vecteur colonne**.

- $0_{n,p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ est appelée la **matrice nulle** $n \times p$.

- $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$ est appelée la **matrice identité** d'ordre n.

2.2 Opérations

Définition 2.2. *(linéarité) Soit $A = (a_{ij}), B \in (b_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit*

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K}),$$

$$\lambda A := (\lambda a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K}).$$

Exemple :

$2\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

Définition 2.3. *(produit matriciel) Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K}), B = (b_{jk}) \in M_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit*

$$A \times B = \left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk} \right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant q}} \in M_{n,q}(\mathbb{K}).$$

Exemple : Dans le produit $A \times B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{nq} \end{pmatrix} = C,$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nq} \end{pmatrix}$$

$$c_{21} = \begin{pmatrix} a_{21} \\ \vdots \\ a_{2p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{21} \\ \vdots \\ b_{2p} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{p} a_{2j}\, b_{j1}.$$

Exemples :

$$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n) \in M_1(\mathbb{K}) = \mathbb{K}.$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 a_1 & \cdots & b_1 a_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n a_1 & \cdots & b_n a_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K}).$$

sous exemple : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 16 \\ 0 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

Remarque : AB est rarement égale à BA.

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Les exos 2.1, 2.2, 2.4, 2.5, 2.7, 3.2 : cours présentiel 01/02/2021

On peut décrire un système d'équation linéaire par une matrice.

Exemple : Chercher $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 3y = 10 \end{cases}$

est équivalent à chercher $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tel que $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Règles de calculs :

- (linéarité) Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et soit $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $C \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ alors
  $(\lambda A + \mu B)C = \lambda(AC) + \mu(BC)$.
- (associativité) Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in M_{q,r}(\mathbb{K})$, alors
  $(AB)C = A(BC)$.
  On peut donc l'écrire ABC.

Proposition 2.4.

i. Pour tout $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, *on a* $I_n \times A = A = A \times I_p$.

ii. Pour tout $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$, *on a* $0_{n,p} \times B = 0_{n,q}$ *et* $B \times 0_{q,r} = 0_{p,r}$.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.3 Matrices inversibles

2.3.1 Généralité

Définition 2.5. *Une matrice carrée* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *est inversible s'il existe* $B \in M_n(\mathbb{K})$ *tel que*

$$AB = BA = I_n.$$

On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *l'ensemble des matrices inversibles.*

Proposition 2.6.

i. *Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Si $AB = I_n$, alors $BA = I_n$.*

ii. *(Unicité) Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Il existe une unique $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = I_n$.*
On note A^{-1} l'inverse de A.

Exemple : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (se généralise en dimension qcq)

Règles de calculs :

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (car $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}A^{-1}AB = BI_nB^{-1} = BB^{-1} = I_n$)
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$ $(\lambda A \times \frac{1}{\lambda}A^{-1} = I_n)$

Proposition 2.7. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, $B, C \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Si A est inversible, alors*

$$AB = AC \quad \Rightarrow \quad B = C.$$

Preuve : $AB = AC \quad \Rightarrow \quad A^{-1}AB = A^{-1}AC \quad \Rightarrow \quad I_nB = I_nC \quad \Rightarrow \quad B = C.$

Remarque. Ce n'est pas vrai en général.

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.3.2 Les matrices 2×2

Proposition 2.8. *Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$. Alors A est **inversible** si et seulement si $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$. Dans ce cas*

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}.$$

Vérification :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad+b(-c) & a(-b)+ba \\ cd+d(-c) & c(-b)+da \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (ad-bc)I_2.$$

Remarque : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si det(A) $\neq$0 alors A est inversible.

Exemple : Calculer $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2\times 3 - 1\times 1}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Calculer $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\cos\theta\cos\theta + \sin\theta\sin\theta}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$

remarque : l'linverse de la rotation d'angle θ est la rotation d'angle $-\theta$.

Exemple : Calculer $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$. (par convention $A^0 = I_n$ si $A \in M_n(\mathbb{K})$)

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

preuve : par récurence sur 2 côtés

soit $n > 0$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

soit n<0 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Mais pourquoi on veut inverser les matrices ?

Corollaire 2.9. *Soit $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Le système d'équation linéaire*

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

admet une unique solution $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *ssi la matrice* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *est inversible.*

Dans ce cas la solution est $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathrm{ad-bc}}\begin{pmatrix} de - bf \\ -ce + af \end{pmatrix}$.

Preuve : le système peut s'écrire $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$,

donc $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$.

Remarque : ce corollaire se généralise en dimension qcq :

Ex : $\begin{cases} ax+by+cz=j \\ dx+ey+fz=k \\ gx+hy+iz=l \end{cases}$ admet une unique solution $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ssi $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ est inversible

ssi $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\neq 0$.

On fait les exos !

2.8, 2.9

2.8 (a) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$B=A^2-2A-3I_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) donc $1/3(A^2-2A)=I_3$

donc $A\times\frac{1}{3}(A-2I_3)=I_3$

donc $A^{-1}=\frac{1}{3}(A-2I_3)$.

2.9 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

(a)

$(A+I_3)^3=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) donc $A^3+3A^2+3A+I_3=0_3$

donc $A(-A^2-3A-3I_3)=I_3$

donc A est inversible et $A^{-1}=-A^2-3A-3I_3$.

2.4 Transposée d'une matrice

Définition 2.10. *Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. La transposée de $A = (a_{ij})$ est la matrice définie par*

$$A^T = (a_{ji}) \in M_{p,n}(\mathbb{K}).$$

Exemple : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Règles de calculs :

- $(A^T)^T = A$
- $(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $A^T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

  $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n$

Définition 2.11. *Une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite* ***symétrique*** *(resp.* ***antisymétrique****) si $A^T = A$ (resp. $A^T = -A$).*

Exemple : d'une matrice symétrique ? I_n

$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 8 & 5 & 100 \\ 9 & 100 & 6 \end{pmatrix}$ on veut $a_{ij} = a_{ji}$, mais si $i = j$, $a_{\mathrm{ii}} = a_{\mathrm{ii}}$ donne aucune condition

d'une matrice antisymétrique?

$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 9 \\ -8 & 0 & 10 \\ -9 & -10 & 0 \end{pmatrix}$ on veut $a_{ij} = -a_{ji}$, mais si $i = j$, $a_{\mathrm{ii}} = -a_{\mathrm{ii}}$ donc $a_{\mathrm{ii}} = 0$

Remarque : si une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est à la fois symétrique et antisymétrique, alors $A = 0_n$

(parce que $a_{ij} = a_{ji}$ et $a_{ij} = -a_{ji}$ donc $a_{ji} = 0$.)

On fait l'exo !

3.3 $A \in M_n(\mathbb{K})$, on pose

$B = A + A^T, C = A - A^T$

$B^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = B$ donc B symétrique

$C^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -C$ donc C antisymétrique

$B + C = 2A \qquad$ donc $\quad A = 1/2B + 1/2C$

comme $(1/2B)^T = 1/2B^T = 1/2B$ donc 1/2B est aussi symétrique

idème 1/2C est antisymétrique !

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \qquad A + A^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 6 & 10 & 14 \\ 10 & 14 & 18 \end{pmatrix}, \quad A - A^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition 2.12. *Une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite* ***orthogonale*** *si A est inversible et $A^T = A^{-1}$.*

i.e. A est construit en collant n vecteurs colonnes de norme 1 deux à deux orthogonaux.

Vérification : (Rappel exo 2.4)

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{pmatrix}, \text{ alors } AB = (L_i \cdot C_j)_{i \leqslant n, j \leqslant n}$$

Soit $\vec{v_1}, \ \cdots, \ \vec{v_n}$ des vecteurs colonnes dans $\mathbb{R}^n$

$$A^T = \begin{pmatrix} \vec{v_1}^T \\ \vdots \\ \vec{v_n}^T \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \vec{v_1} & \cdots & \vec{v_n} \end{pmatrix}, \text{ donc } A^T A = (\vec{v_i} \cdot \vec{v_j})_{i \leqslant n, j \leqslant n}$$

Si $\vec{v_1}$, $\cdots$, $\vec{v_n}$ sont de norme 1 deux à deux orthogonaux, alors $\vec{v_i}\cdot\vec{v_j}=1$ si $i=j$ et $\vec{v_i}\cdot\vec{v_j}=0$ si $i\neq j$, donc $A^T A=I_n$.

Exemple : I_n, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

une matrice de rotation

$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^T$

2.5 Algorthme du pivot de Gauss - échlonnement

En faisant des manipulation sur les lignes, on veut mettre une matrice sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * & \dots & * & * \\ 0 & 1 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & * & * \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.5.1 Définitions

Définition 2.13. *Une matrce $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ est dite **échelonnée** si*

*i. chaque ligne non nulle de A a son premier coefficient non nul égal à 1, ce 1 est applé un **pivot** de A ;*

ii. si une ligne a son premier coefficient non nul à la colonne j, alors la ligne suivante est soit nulle, soit a son premier coefficient non nul à la colonne $\geqslant j+1$;

iii. si une ligne de A est nulle, toute les suivantes sont nulles .

*Une matrice échelonnée A est dite **bien échelonnée** (ou échelonnée réduite) si en plus*

iv. sur chaque colonne de A contenant un pivot, tout les autres coefficients sont zéros.

Exemples :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 5 & 4 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 5 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{est échelonnée,} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{est bien échelonnée,}$$

avec les pivots en couleur.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{est échelonnée,} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{est bien échelonnée.}$$

2.5.2 Opérations élémentaires

Définition 2.14. *Les 3 opérations suivantes sur les lignes d'une matrice sont applées les opérations élémentaires.*

1. *permuter :* $L_i \longleftrightarrow L_j$
2. *multiplier :* $L_i \leftarrow \lambda L_i$ *avec* $\lambda \neq 0$
3. *remplacer :* $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

Proposition 2.15. *Une opération élémentaire est une multiplication matricielle à gauche, par une matrice inversible.*

Exemples :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \longleftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

2.5.3 Algorithme du pivot de Gauss

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Par des opérations élémentaires, on veut transformer A en forme (bien) échelonnée de façon récurrente.

Etape 1 : Cas 1 : Si la première colonne $C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$ est nulle, on passe à l'étape 2.

Cas 2 : Sinon, il existe un coefficient $a_{i1} \neq 0$. On applique $L_1 \longleftrightarrow L_i$ et $L_1 \leftarrow \frac{1}{a_{i1}} L_1$.

En suite pour tout $i > 1$, on applique $L_i \leftarrow L_i - a_{i1} L_1$.

Ainsi, on obtien $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Etape 2 : Par l'étape 1 on transforme A en l'une des deux forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & \\ \vdots & B_1 \\ 0 & \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ \vdots & & B_2 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

On applique l'étape 1 à $B_1 \in M_{n,p-1}$ ou $B_2 \in M_{n-1,p-1}$.

Par ces deux étapes, on obtient une **matrice échelonnée**.

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * & \dots & * & * \\ 0 & 1 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & * & * \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Etape 3 : A partir du **dernier** pivot $a_{ij}=1$, pour tout $i'<i$, on applique $L_{i'} \leftarrow L_{i'} - a_{ij}L_i$.

On obtien ainsi $C_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

On l'applique à tous les pivots.

Par l'étape 3, on obtient une **matrice bien échelonnée**.

On fait les exos ! (cours présentiel 08022021)

2.10, 2.11

2.11(c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow 1/2 L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow 1/2 L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.11(f)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - L_1]{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow -L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque. En général, une matrice A admet plusieurs formes échlonnées.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow -L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2.6 Rang d'une matrice

2.6.1 Définition

Proposition 2.16. *Par des opérations élémentaires, une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ admet une seule forme bien échelonnée. On l'appele **la forme bien échelonnée** de A.*

Ainsi le nombre de pivots est invariant, et on peut définir la chose suivante :

Définition 2.17. *Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Le **rang** de A est le nombre de pivots de sa forme bien échelonnée (ou d'une forme échelonnée). On le note $\mathrm{rg}(A)$.*

Exemples :

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

Proposition 2.18. *Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$.*

1. $\mathrm{rg}(A) \leqslant \min\{n, p\}$. *(parce que sur la même ligne/colonne d'un pivot y a pas d'autre pivot)*
2. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$.

On fait l'exo !

2.12

$$\operatorname{rg}(A)=\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}=\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rg}(B)=\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & \lambda \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & \lambda \end{pmatrix}=\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & \lambda-6 \end{pmatrix}$$

si $\lambda=6$, c'est $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=1$

sinon, on applique $L_2 \leftarrow \frac{1}{\lambda-6}L_2$, c'est $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=2$

$$\operatorname{rg}(E)=\operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda & 1 \\ 1 & 0 & 2\lambda & \lambda \end{pmatrix}=\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2\lambda & \lambda \end{pmatrix}=\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 2 & 1+\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$=\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1+\lambda}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

si $\lambda=0$, c'est $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=3$

sinon on applique $L_3 \leftarrow \frac{1}{\lambda}L_3$, c'est $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1+\lambda}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\lambda-1}{\lambda} \end{pmatrix}=3$

$\operatorname{rg}(E)$ est toujours 3.

2.6.2 Inverser une matrice par l'algorithm du pivot de Gauss

Proposition 2.19. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. A est inversible ssi sa forme bien échelonnée est I_n.*

(donc ssi $\mathrm{rg}(A) = n$*).*

Explication :

Une opération élémentaire est une multiplication à gauche par une matrice inversible, échelonner une matrice est une suite de multiplications à gauche par des matrices inversibles. Si à la fin on obtient I_n, i.e. par des multiplications à gauche, $B_k \dots B_2 B_1 A = I_n$. Donc A est inversible et $A^{-1} = B_k \dots B_2 B_1$.

Rappel : $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{rg}(I_n) = n$.

Proposition 2.20. *Pour déterminer si une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible ou non, on applique l'algorthm du pivot de Gauss à la matrice en deux bloques $(A|I_n)$.*

Si on obtien $(I_n|B)$ comme forme bien échelonnée, alors A est inversible et $B = A^{-1}$.

Sinon A n'est pas inversible.

Explication : échelonner est une suite de multiplications à gauche. Si $(A|I_n) \to (I_n|B)$ i.e.

$B_k \dots B_2 B_1 (A|I_n) = (I_n|B)$ donc $B_k \dots B_2 B_1 A = I_n$ et $B_k \dots B_2 B_1 I_n = B$, donc $B = B_k \dots B_2 B_1 = A^{-1}$.

Exemples :

Inverser $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: soit par fomule $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ est la même chose que multiplier par $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

car $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

soit par algo $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ donc $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Inverser $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: par algo $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - L_3]{L_2 \leftarrow L_2 - L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$, donc $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pause, on revient à 10h38

On fait les exos !

2.13

(c) inverser $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

donc $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

vérification : $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(a) inverser $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ par formule

par algo : $\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & 1 & -4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/10 & 4/10 \end{array}\right)$

$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3/10 & -2/10 \\ 0 & 1 & -1/10 & 4/10 \end{array}\right)$ donc $\begin{pmatrix} 3/10 & -2/10 \\ -1/10 & 4/10 \end{pmatrix}$ est l'inverse

(b) inverser $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

par algo : $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right) \rightarrow$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right)$ donc $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(h) inverser $H = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ par algo

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

donc $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3 Systèmes linéaires

On rappel qu'un **système d'équations linéaires**

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{12}\,x_p = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2p}\,x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \cdots + a_{np}\,x_p = b_n \end{cases}$$

peut être décrire par des matrices

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Dans ce chapitre on cherche à résoudre un système d'équations linéaires en manipulant des matrices.

3.1 Définitions

Définition 3.1. *Un* ***système d'équation linéaire à n équations et p inconnues*** *est une équation de la forme*

$$AX = B$$

où $A \in M_{np}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n1}(\mathbb{K})$ sont des matrices données, et où on cherche à déterminer le vecteur colonne $X \in M_{p1}(\mathbb{K})$.

Pour alléger l'écriture, $AX = B$ peut s'écrire $(A|B)$.

Vocabulaires :

- Les x_i sont appelés les **inconnues** du système.
- A est appelé la **matrice associée** au système.
- B est appelé le **second membre** du système.
- Si $B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, on dit que le système est **homogène**.
- Le système $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ est appelé le **système homogène associé** du système $AX = B$.

Exemples :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 100 \\ 2 & 5 & 8 & 111 \\ 3 & 6 & 9 & 121 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ est un système d'équations linéaires.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 100 \\ 2 & 5 & 8 & 111 \\ 3 & 6 & 9 & 121 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ est son système homogène associé.}$$

3.2 Résolusion

Définition 3.2. *Soit $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n1}(\mathbb{K})$. Une solution du système $AX = B$ est un vecteur colonne $\vec{v} \in \mathbb{K}^p$ tel que $A\vec{v} = B$.*

exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x + 2y = 2 \\ y = 3 \end{array} \right.$, donc $\left\{ \begin{array}{c} x = -4 \\ y = 3 \end{array} \right.$, et $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ est une solution parce que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Proposition 3.3. *Pour un système $AX = B$, il y a*

i. soit zéro solution;

ii. soit une solution unique;

iii. soit une infinité de solutions. (forme une droite affine, un plan affine, etc...)

exemple (de rappel) :

$x + 2y = 3$ est une droite affine dans $\mathcal{E}^2$

$x + 2y + z = 3$ est une plan affine dans $\mathcal{E}^3$

$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ x + 3y - z = 5 \end{array} \right.$ est une droite affine dans $\mathcal{E}^3$

Exemples : combien il y en a de solutions pour les systèmes suivant?

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 1 solution $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 0 solution on a $x+y=2$ et $x+y=3$ en même temps,

donc 2=3 pas possible

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ∞ solutions $x+y=2$ et $2x+2y=4$ donc $\Leftrightarrow$ $x+y=2$ est une droite

Résoudre le système $AX=B$, c'est de déterminer l'ensemble de toutes les solutions de ce système. Cet ensemble est un sous-enemble de $\mathbb{K}^p$ ou $\mathcal{E}^p$.

Définition 3.4. *Deux systèmes d'équations linéaires sont dits équivalents s'ils ont exactement le même ensemble de solutions.*

Exemple :

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ est équivalent à

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$

Proposition 3.5. *Soit $A\in M_{np}(\mathbb{K})$ et $B\in M_{n1}(\mathbb{K})$. Soit $C\in M_n(\mathbb{K})$ inversible.*

Les systèmes $AX=B$ et $CAX=CB$ sont équivalents.

Preuve : Si $\vec{v}$ est une solution de $AX=B$, alors $A\vec{v}=B$ donc $CA\vec{v}=CB$.

Donc l'ensemble des solutions de $AX=B$ est inclu dans l'ensemble des solutions de $CAX=CB$.

Si $\vec{v}$ est une solution de $CAX=CB$, alors $CA\vec{v}=CB$, donc $C^{-1}CA\vec{v}=C^{-1}CB$, donc $A\vec{v}=B$.

Donc l'ensemble des solutions de $CAX=CB$ est inclu dans l'ensemble des solutions de $AX=B$.

C'est 2 ensembles sont pareil !

Proposition 3.6. *Soit $AX=B$ un système d'équations linéaires. Si $A\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors il y a une unique solution.*

Preuve : La solution est $\vec{v}=A^{-1}B$.

Pour résoudre $AX=B$ dans le cas $A\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on peut échelonner la matrice en 2 blocs $(A|B)$.

En effet, en échelonnant, on a multiplier par A^{-1}, donc à la fin on trouve $(I_n|A^{-1}B)$.

Exemple : résoudre $\begin{cases} x+2y-z=3 \\ y+3z=5 \\ 2z=10 \end{cases}$

on applique l'algo du pivot de Gauss à

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 28 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}$ est l'unique solution de $\begin{cases} x+2y-z=3 \\ y+3z=5 \\ 2z=10 \end{cases}$.

On fait l'exo !

2.1.

Résoudre systèmes linéaires

$S_1 = \begin{cases} x-2y=1 \\ x+2y=1 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

L'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$: $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

On mutiplie l'inverse qu'on a trouvé à gauche, sur les 2 côté de l'équation

$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$S_2 = \begin{cases} 2x-2y=1 \\ x+2y=2 \end{cases}$

L'inverse de $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

donc $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

donc $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

$S_3 = \begin{cases} 2x - 2y = 1 \\ -x + y = 2 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car le déterminant vaut 0

S_3 est équivalent à $\begin{cases} 2x - 2y = 1 \\ 2x - 2y = -4 \end{cases}$ c'est une contradiction, il n'y a pas de solution !

(qui est encore équivalent à $\begin{cases} 2x - 2y = 1 \\ 0 = -5 \end{cases}$)

$S_4 = \begin{cases} 2x - 2y = 1 \\ -x + y = -1/2 \end{cases}$

S_4 est équivalent à $\begin{cases} 2x - 2y = 1 \\ 2x - 2y = 1 \end{cases}$, encore équivalent à $\{\ 2x - 2y = 1$, donc l'ensemble des solution $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est une droite affine dans le plan. (Il y a une infinité de solutions.)

ex : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ sont des solutions.

$S_5 = \begin{cases} 40x + 20y = 10 \\ 1/2x + 1/4y = 1/2 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} 40x + 20y = 10 \\ 40x + 20y = 40 \end{cases}$, équivaut à $\begin{cases} 40x + 20y = 10 \\ 0 = 30 \end{cases}$, pas de solution !

Soit $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n1}(\mathbb{K})$. Pour résoudre le système $AX = B$, on échelonne $(A|B)$, on obtient $(\tilde{A}|\tilde{B})$ avec $\tilde{A}$ bien échelonnée.

Par proposition 3.5, $AX = B$ et $\tilde{A}X = \tilde{B}$ sont équivalent.

(Parce que échlonner une matrice est une suite d'opérations élémentaires, et chaque opération élémentaire est une multiplication à gauche d'une matrice inversible. Donc finalement $\tilde{A} = CA$ et $\tilde{B} = CB$ avec une matrice inversible C)

Pour résoudre $\tilde{A}X = \tilde{B}$, il y a 3 cas :

1. $\mathrm{rg}(A) = n = p$: A est inversible et $\tilde{A} = I_n$. Il existe **une unique solution** $X = \tilde{B}$.

   Exemple : déjà fait dans proposition 3.6.

2. $\mathrm{rg}(A) = n < p$: Il n'y a pas de ligne nulle dans $\tilde{A}$, mais il y a des colonnes qui ne contiennent pas de pivots. Il y a une **infinité de solution**.

Exemple : $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le système est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \\ t = 1 \end{cases}$

3. $\mathrm{rg}(A) < n$: Il y a des lignes nulles dans $\tilde{A}$. On note $\tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_n \end{pmatrix}$.

   Il y a deux sous cas :

   i. Il y a une contradiction du type $0 = \tilde{b}_j$ avec $\tilde{b}_j \neq 0$. Il y a **aucune solution**

Exemple : $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Le système est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, donc $\begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \\ t = 1 \\ 0 = 2 \end{cases}$.

   ii. Toute ligne nulle engendre une équation du type $0 = 0$. On peut supprimer ces lignes et revient au cas 1 ou 2.

Exemple : $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Le système est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \\ t = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$.

On fait les exos !

Un système est homogène si le second membre $B = \vec{0}$.

1.3

(a) n=7 équations p=5 inconnues de rang 4

exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$AX = B$ donne $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ mais $x_5 = n'\text{importe quoi}$

donc il y a une infinité de solutions.

Précisément : on a d'abord le cas 3.ii (car rg<n et $B = 0$), on supprime 3 équations du type 0=0 il reste 4 équations , 5 inconnues , rg=4, on revient cas 2, donc ∞ solutions.

(b) une unique solution. n=7, p=5, rg=5

on a d'abord le cas 3.ii (car rg<n et $B=0$), on supprime 2 équations du type 0=0

on revient cas 1, unique solution

(c) infinité de solutions. n=5, p=7, rg=4,

on a d'abord le cas 3.ii (car rg<n et $B=0$), on supprime 1 équations du type 0=0

on revient cas 2, infinité de solutions

(d) infinité de solutions. n=4, p=7, rg=4, cas 2.

Si $B\neq 0$?

On a potentiellement (**mais toujours !**) des ligne $0=b_j\neq 0$ qui nous donne une contracition (pour a, b, c). Donc a,b,c peut admettre aucune solution.

Exemple

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=1\\ x+y=1 \end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 1 \end{pmatrix}$$

on échelonne $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{L_2\leftarrow L_2-L_1}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, donc $\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 0 \end{pmatrix}$, donc

$$\left\{\begin{array}{c} x+y=1\\ 0=0 \end{array}\right. .$$

C'est la même chose que faire $L_2\leftarrow L_2-L_1$ directement sur $\left\{\begin{array}{l} x+y=1\\ x+y=1 \end{array}\right.$

2.2 Résoudre systèmes linéaires

$$S_1=\left\{\begin{array}{c} x-2y=1\\ 2x-2y+z=2 \end{array}\right.$$

On échelonne $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1\\ 2 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)\xrightarrow{L_2\leftarrow L_2-2L_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)\xrightarrow{L_1\leftarrow L_1+L_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{L_2\leftarrow 1/2L_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{array}\right)$

On a donc $\left\{\begin{array}{l} x+z=1 \\ y+1/2z=0 \end{array}\right.$ cas 2, infinité de solutions. (c'est une droite affine dans l'espace)

$$T_1 = \left\{\begin{array}{l} x+2y=-2 \\ 2y-z=3 \\ -x-z=1 \end{array}\right.$$

On échelonne $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$

on a déjà $0=-4$, aucune solution

$$U_2 = \left\{\begin{array}{l} 2y+z=1 \\ 2y+2z=2 \\ -4x+2t=-1 \end{array}\right.$$

On échelonne $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 1/2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 1/2 \end{array}\right)$

$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 1/2 \end{array}\right)$

on a $\left\{\begin{array}{l} y=0 \\ z=1 \\ 2x-t=1/2 \end{array}\right.$, infinité de solutions.

CC1 jeudi 04/03

Exos de révision Ch1 :

Plans et droites : feuille 1, 1.7(i)

Trouver un système de la droite $\mathcal{D}$ passant par $A=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dirigée par $\vec{u}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

On veut trouver 2 plans différents $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ qui contiennent $\mathcal{D}$.

On cherche 2 vecteurs différents orthogonaux à $\vec{u}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, qui donnent des vecteurs normaux de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

On peut prendre $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{P}_1=\{2y+3z=0\}$ et $\mathcal{P}_2=\{2x+z=0\}$ contiennent $\vec{u}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Donc $\begin{cases} 2y+3z=0 \\ 2x+z=0 \end{cases}$ est la droite passant par $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dirigée par $\vec{u}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

On cherche $\begin{cases} 2y+3z+d_1=0 \\ 2x+z+d_2=0 \end{cases}$ passant par $A=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Donc c'est $\begin{cases} 2y+3z-7=0 \\ 2x+z-7=0 \end{cases}$.

Rotation et homothétie : feuille 1-suite, 3.3

(même type 3.1)

Projection orthogonal : feuille 1-bis, 1.1(ii)(iv), 1.2(ii)(iv)

1.1(ii) projection orthogonal sur la droite $2x+2=0$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $2x+2=0$.

Donc la projection orthogonal est de type $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+t \\ y+0 \end{pmatrix}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

C'est un point sur $2x+2=0$, on a $2(x+t)+2=0$, donc $t=-x-1$

donc $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ y \end{pmatrix}$ est la projection orthogonal sur $2x+2=0$.

(iv) projection orthogonal sur le plan $-x+z-3=0$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal. Donc la projection est de type $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-t \\ y+0 \\ z+t \end{pmatrix}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

C'est un point sur $-x+z-3=0$, donc $-(x-t)+(z+t)-3=0$,

donc $2t-x+z-3=0$, donc $t=\frac{x-z+3}{2}$.

Donc $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-\frac{x-z+3}{2} \\ y \\ z+\frac{x-z+3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+z-3}{2} \\ y \\ \frac{x+z+3}{2} \end{pmatrix}$.